特異点近傍におけるジャイロ運動論的 Vlasov 方程式の数値保存性

京都大学工学部物理工学科 中島大地
nakajima.daichi.26s@st.kyoto-u.ac.jp

磁場閉じ込め核融合プラズマでは、微視的不安定性に起因した乱流輸送によって閉じ込めが悪化することから、そのメカニズムの物理的理解や制御を目的として、ジャイロ運動論モデルに基づいた理論・シミュレーション研究が精力的に行われている。近年のジャイロ運動論モデルでは、ジャイロ中心座標系における基本 1 系式から導かれる運動論方程式によって Vlasov 方程式を定式化することによって、厳密な粒子保存性が保証されている [1] が、極座標系においては特異点が存在し、その近傍で粒子の数値的な湧き出しが生じる可能性がある。シミュレーションの際には準中性条件に基づいた Poisson 方程式も同時に解いているため、特異点近傍において粒子の数値的な湧き出しが発生すると計算が破綻してしまう原因となり得る。また、安定な数値計算のためには L2 ノルムも保存していることが望ましいが、こちらについては計算スキームとして森西スキーム [2][3] を採用することによって満たすことができる。一方で、森西スキームを採用する場合には、位相体積保存則が数値的に成立していることが必要となる。よって特異点近傍での位相体積保存を満たしつつ、粒子数保存も満たす方法が必要となる。

そこで本研究では、これらの保存性を数値的に満たすための条件を求めることを目的としてジャイロ運動論的 Vlasov 方程式の差分方程式について理論的な考察を行った。まず r 方向について磁気軸をまたいでメッシュを配置し、その中点に磁気軸が来るように設定する。たとえば、2 次精度では

$$r_1 = -\frac{\Delta r}{2}, \quad r_2 = \frac{\Delta r}{2}, \quad r_3 = \frac{3\Delta r}{2}, \quad r_4 = \frac{5\Delta r}{2}, \dots$$

のようにメッシュを置く。そして差分化したときの粒子の流れについて特異点近傍においてその合計が打ち消しあってゼロになるという条件から、粒子数保存則を数値的に満たす場合の条件として、

$$J\dot{r}\left(-\frac{\Delta r}{2}, \theta\right) = -J\dot{r}\left(\frac{\Delta r}{2}, \theta + \pi\right)$$

という結果を得た (J はヤコビアン)。これは、r が負であるメッシュにおいて左辺の表式 (他のメッシュと同様の表式) を使うのではなく、右辺の表式を用いる必要があるということを意味する。この操作を行うことにより、極座標系においても磁気軸をまたぐ粒子/熱輸送を考慮することが可能となり、かつ粒子の数値的な湧き出しを防ぐことが可能となった。

しかし、このとき位相体積保存則が成立せず森西スキームを採用することが不可能となる。そこで運動方程式を用いて上の式を書き下して両辺を比較することにより、位相体積保存則と粒子数保存則を同時に満たすための条件式を導出することができた。本発表ではそれらの詳細について述べる。

[1] A. J. Brizard and T. S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
[2] Y. Morinishi *et al.*, J. Comput. Phys. **143**, 90 (1998).
[3] Y. Idomura *et al.*, J. Comput. Phys. **226**, 244 (2007).