

帯状流と乱流のエンストロフィー分配

Partition of enstrophy between zonal and turbulent flows

東京大学工学部4年・吉田研究室 相原 寛人

1. 序論

惑星大気にみられる帯状流は乱流の自己組織化によって形成される安定な大規模構造である。帯状流の自己組織化は惑星大気のみだけでなく様々なマクロ系に共通の構造が現れることが知られている。その一つが核融合プラズマであり、閉じ込め性能が帯状流の形成によって向上することから関心を集めている。惑星大気においては帯状流が形成されると経度方向の大規模な流れの影響で、赤道領域から極地への熱輸送が抑制される。核融合プラズマにおいても帯状流の形成により同様の効果が生まれる。

渦度方程式は非線形方程式であり、その一般解を数学的に表現することはできないが、様々な理論的アプローチで現象の本質を解明する試みがなされている。本研究では、流体（あるいはプラズマ）の渦の強さを表すエンストロフィーに注目する。エンストロフィーは粘性が0の極限では保存量となる。流れ場の乱れた成分（乱流）と秩序構造をもつ帯状流で、エンストロフィーがどのように分配されるのかを評価することで、流れの自己組織化傾向の強さを計ることができる。本研究では、帯状流の自己組織化の数値シミュレーションを行い、エンストロフィーの分配についてパラメータ依存性を調べるとともに、基本的保存量であるエネルギーを考慮した理論的評価と比較し、帯状流のエンストロフィーを決めるメカニズムを分析する。

2. 支配方程式

本研究では、2次元順圧流体の渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{\varphi, \omega\} = \nu \Delta \omega \quad (1)$$

$$\omega = -\Delta \varphi + \beta y \quad (2)$$

(ω : 渦度、 φ : 流れ関数、 ν : 粘性係数、 β : コリオリ力の緯度方向の変化率)を用いる。領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ において境界条件を、 x : periodic、 y : dirichlet とする。コリオリ力は β 面近似により表現した。

3. 自己組織化の数値シミュレーション

数値シミュレーションを行い(Fig. 1), エンストロフィー分配のパラメータ依存性を調べた。

渦度を $\omega = \omega_z + \omega_w$ のように帯状流を成す帯成分と残りの波成分に直交分解する。

ただし、
$$\omega_z(x) = \int \omega(x, y) dx \quad (4)$$

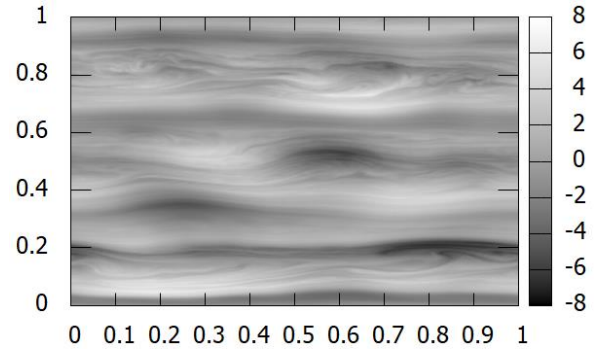


Fig. 1 distribution of ω

初期エネルギーに対しては、初期の ω が大きいほど帯状流への分配が大きくなる傾向がみられる。エネルギーが高くなるほど、非線形性は強まるため、このことから帯状流の自己組織化においては非線形性が重要な要素であると考えられる。次に粘性係数 ν 及びコリオリパラメータ β に関してはある点を超えると自己組織化傾向が単調に弱くなることが確認された。つまり ν や β の値が一定以上大きくなり、方程式の線形性が強くなると自己組織化傾向は弱まるということであり、この結果も帯状流の自己組織化が非線形現象であることを示している。逆に β は0に近づくと非等方性が失われ、帯状流の自己組織化はほとんど起こらない。

4. 理論的下限值との比較

運動量及び、エネルギーの保存を拘束条件とした変分問題として、オイラー-ラグランジュ方程式を解くことにより帯状流に分配されるエンストロフィーを最小にする ω, φ が得られた。

$$\omega_* = -2c_1 \lambda^2 \sin \lambda y + \beta y \quad (6)$$

$$\varphi_* = 2c_1 \sin \lambda y + c_2 y \quad (7)$$

各未知係数はそれぞれ数値シミュレーション結果から求めることができる。

シミュレーションでは理論的下限值より大きな値が実現されている

5. 結論

2次元の渦度方程式を用い、コリオリ力の効果で帯状流が自己組織化することを示し、帯状流に分配されるエンストロフィーの大きさを評価することで、自己組織化傾向のパラメータ依存性を明らかにした。シミュレーションで得られた帯状流のエンストロフィーは理論的下限值より大きい。このことから、帯状流の自己組織化にエネルギーと運動量以外の束縛条件が作用していることが示唆される